



เอกสารประกอบการจัดการเรียนรู้
วิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้า รหัสวิชา 3104-9006
หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง(ปวส.) พุทธศักราช 2557
สาขาวิชาไฟฟ้ากำลัง
ประเภทวิชาช่างอุตสาหกรรม

จัดทำโดย
นางพรเพ็ญ วังพิมูล

วิทยาลัยเทคนิคหนองคาย
สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา
กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

เอกสารประกอบการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ไฟฟ้า รหัสวิชา 3104-9006 หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง(ปวส.) พุทธศักราช 2557 ประเภทวิชาช่างอุตสาหกรรม สาขาวิชาไฟฟ้ากำลัง ฉบับนี้ได้เรียบเรียงตรงตามจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชา และคำอธิบายรายวิชา โดยศึกษาค้นคว้าข้อมูลจากหนังสือ เอกสารต่างๆ และจากประสบการณ์การสอน เพื่อใช้ในการจัดการเรียนการสอนนักศึกษา ในรายวิชาคณิตศาสตร์ไฟฟ้า

เอกสารประกอบการจัดการเรียนรู้ฉบับนี้ แบ่งเนื้อหาสาระออกเป็น 11 หน่วย แต่ละหน่วยประกอบด้วยใบความรู้ แบบทดสอบก่อนเรียน แบบฝึกหัด แบบทดสอบหลังเรียน เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน เฉลยแบบฝึกหัด และเฉลยแบบทดสอบหลังเรียน โดยจัดกิจกรรมการเรียนรู้ให้เหมาะสมกับเนื้อหา เวลา และผู้เรียน

ผู้เรียบเรียงหวังเป็นอย่างยิ่งว่า เอกสารประกอบการจัดการเรียนรู้ฉบับนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อนักศึกษาในสถานศึกษาสังกัดสำนักคณะกรรมการการอาชีวศึกษา และผู้ที่สนใจ

นางพรเพ็ญ วังพิมูล

แผนการจัดการเรียนรู้

วิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้า
กิต

รหัสวิชา 3104 – 9006

จำนวน 3 หน่วย

ระดับชั้น ประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง (ปวส.)
กำลัง

สาขาวิชา ช่างไฟฟ้า

จุดประสงค์รายวิชา เพื่อให้

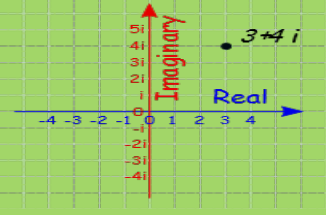
1. เพื่อเข้าใจหลักการทฤษฎีและการใช้งานของตัวแปรเชิงซ้อน เวกเตอร์ อนุกรมฟูเรียร์ และลาปลาซทรานฟอร์ม
2. ประยุกต์ทฤษฎีต่างๆ ไปวิเคราะห์ใช้งานกับวงจรไฟฟ้ากระแสตรงและกระแสสลับ
3. มีกิจนิสัยในการทำงานร่วมกับผู้อื่นด้วยความประณีต รอบคอบและศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม

สมรรถนะรายวิชา

1. แสดงความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีและการใช้งานของตัวแปรเชิงซ้อน เวกเตอร์ อนุกรมฟูเรียร์ และลาปลาซทรานฟอร์ม
2. ใช้ทฤษฎีต่าง ๆ วิเคราะห์รูปคลื่นไฟฟ้าในวงจรไฟฟ้ากระแสตรงและกระแสสลับ

คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาทฤษฎีและการนำใช้งานของตัวแปรเชิงซ้อน ทฤษฎีและการนำมาใช้งานของการวิเคราะห์ เวกเตอร์ ศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีอนุกรมฟูเรียร์และการนำมาใช้ในการวิเคราะห์รูปคลื่นไฟฟ้า การกระจายจากครึ่งคาบ อินทิกรัลฟูรีเยร์ ฟูเรียร์ทรานฟอร์ม ทฤษฎีของลาปลาซทรานฟอร์ม และการนำมาใช้วิเคราะห์วงจรไฟฟ้าทั้งขณะมีค่าและไม่มีค่าเริ่มต้นคงค้างอยู่ในวงจร ทั้งวงจรกระแสตรงและกระแสสลับ



หน่วยที่ 1

จำนวนเชิงซ้อน

สาระการเรียนรู้

- 1.1 บทนำ
- 1.2 จำนวนจริง
- 1.3 จำนวนจินตภาพ
- 1.4 จำนวนเชิงซ้อน
- 1.5 รูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน
- 1.6 การเปลี่ยนรูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน
- 1.7 การใช้เครื่องคำนวณในการเปลี่ยนรูปจำนวนเชิงซ้อน Rec-Pol และ Pol-Rec
- 1.8 บทสรุป

สาระสำคัญ

จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนที่ประกอบด้วยจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ สามารถเขียนได้ 4 รูปแบบ คือ

1. Rectangular Form เช่น $Z = x \pm jy$
2. Polar Form เช่น $Z = r \angle \pm \theta^\circ$
3. Trigonometric Form เช่น $Z = r \cos \theta^\circ \pm j r \sin \theta^\circ$ หรือ $Z = r(\cos \theta^\circ \pm j \sin \theta^\circ)$
4. Exponential Form เช่น $Z = re^{\pm j\theta}$

ในการนำจำนวนเชิงซ้อนทั้ง 4 รูปแบบมาใช้งาน รูปแบบ Rectangular Form และรูปแบบ Trigonometric Form เหมาะสมสำหรับใช้คำนวณการบวกและลบ แต่ไม่เหมาะถ้าจะนำไปคูณและหาร หรือ รูปแบบ Polar Form และ Exponential Form เหมาะสมสำหรับใช้คำนวณการคูณและหาร แต่ไม่สามารถนำไปบวกและลบได้ ดังนั้น จึงต้องมีการเปลี่ยนรูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน เพื่อให้สะดวกต่อการนำไปใช้คำนวณต่อไป

จุดประสงค์การเรียนรู้

จุดประสงค์ทั่วไป

- 1) เพื่อให้ นักศึกษามีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน รูปแบบจำนวนเชิงซ้อน และการเปลี่ยนรูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน
- 2) เพื่อให้มีการพัฒนาคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์ใน ด้านความสนใจใฝ่รู้ ความรับผิดชอบ ความซื่อสัตย์สุจริตและการประหยัด

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อเรียนจบเรื่องจำนวนเชิงซ้อนแล้ว นักศึกษาสามารถ

- 1) หาค่าจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนได้
- 2) ระบุตำแหน่งของจำนวนเชิงซ้อนบนแกนพิกัดเชิงเส้นได้
- 3) เปลี่ยนรูปแบบจำนวนเชิงซ้อน Rectangular เป็น Polar ได้
- 4) เปลี่ยนรูปแบบจำนวนเชิงซ้อน Polar เป็น Rectangular ได้
- 5) เปลี่ยนรูปแบบจำนวนเชิงซ้อน Polar เป็น Exponential ได้
- 6) เปลี่ยนรูปแบบจำนวนเชิงซ้อน Exponential เป็น Polar ได้
- 7) ประยุกต์ใช้เครื่องคำนวณในการเปลี่ยนรูปแบบจำนวนเชิงซ้อน Rec - Pol และ Pol - Rec ได้

แบบทดสอบก่อนเรียน หน่วยที่ 1
เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1. ข้อใด คือ “ จำนวนจริง ” ทุกจำนวน

ก. $\sqrt{-16}$, $-2\frac{5}{7}$, $-4\sqrt{2}$

ข. $2\sqrt{-2}$, 2^5 , 0.0001

ค. $-\sqrt[3]{1}$, $-\pi^{-5}$, $\frac{\sqrt{-1}}{2}$

ง. $-e^2$, $(\sqrt{-2})^3$, $\sqrt{\pi}$

จ. $-\sqrt{5}$, 10^{-5} , $-\sqrt[4]{2}$

2. จากรูป ข้อใด คือค่าของ Z

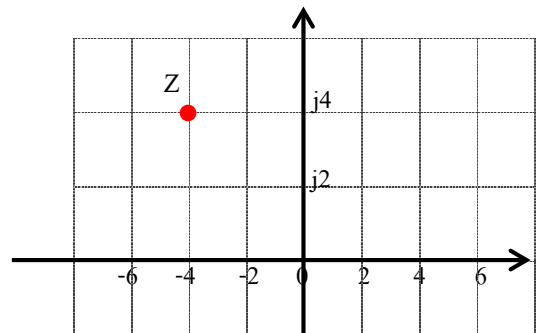
ก. $-2 + j4$

ข. $-2 - j4$

ค. $-4 - j4$

ง. $-4 + j4$

จ. $-4 - j2$



3. เมื่อ $A = 5\cos 200^\circ + j5\sin 200^\circ$ ข้อใดถูกต้อง

ก. $\text{Re}(A) = -0.939$, $\text{Im}(A) = -0.342$

ข. $\text{Re}(A) = 0.939$, $\text{Im}(A) = -0.342$

ค. $\text{Re}(A) = 0.939$, $\text{Im}(A) = 0.342$

ง. $\text{Re}(A) = 4.69$, $\text{Im}(A) = -1.71$

จ. $\text{Re}(A) = -4.69$, $\text{Im}(A) = -1.71$

4. รูปแบบ Polar form ของ $-20 - j6$ คือข้อใด

ก. $20.88\angle 73.3^\circ$

ข. $20.88\angle -106.7^\circ$

ค. $20.88\angle -163.3^\circ$

ง. $20.88\angle 16.7^\circ$

จ. $20.88\angle -16.7^\circ$

5. รูปแบบ Rectangular form ของ $12\angle 240^\circ$ คือข้อใด

ก. $240.3 - j87.14$

ข. $240.3 + j2.86$

ค. $6 - j10.4$

ง. $-6 + j10.4$

จ. $-6 - j10.4$

6. ถ้า $S = P + jQ$ จงหา $|S|$ เมื่อ $P = 9$, $Q = 10$

ก. $13.45\angle 42^\circ$

ข. $13.45\angle 48^\circ$

ค. $10.88\angle 63.3^\circ$

ง. $9.88\angle 1.56^\circ$

จ. $8.86\angle 1.56^\circ$

7. รูปแบบ Exponential form ของ $110\angle -6^\circ$ คือข้อใด

ก. $110e^{j0.105}$

ข. $110e^{-j0.105}$

ค. $110e^{j1.19}$

ง. $110e^{-j1.19}$

จ. $-110e^{j1.19}$

8. รูปแบบ Polar form ของ $15e^{-j\frac{3\pi}{2}}$ คือข้อใด

ก. $15\angle -60^\circ$

ข. $15\angle -120^\circ$

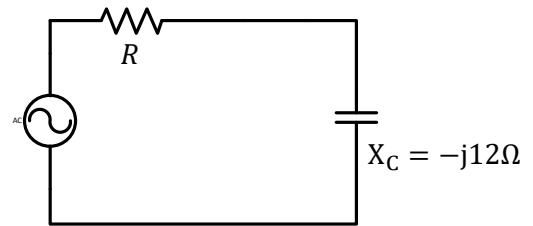
ค. $15\angle -180^\circ$

ง. $15\angle -270^\circ$

จ. $15\angle -540^\circ$

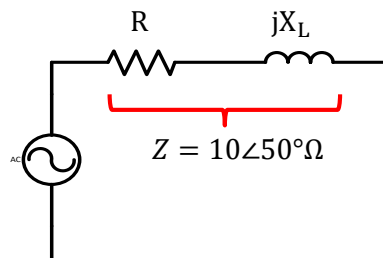
9. วงจรดังรูป จงหาค่าความต้านทาน เมื่ออิมพีแดนซ์รวมของวงจร $Z = 25.5\angle 0^\circ \Omega$

- ก. $R = 22.5 \Omega$
- ข. $R = 28.5 \Omega$
- ค. $R = 29.5 \Omega$
- ง. $R = 35.3 \Omega$
- จ. $R = 39.3 \Omega$



10. จากวงจรดังรูป ถ้าอิมพีแดนซ์รวมของวงจร $Z = 10\angle 50^\circ \Omega$ จงหาค่าความต้านทาน R และรีแอคแตนซ์ X_L

- ก. $R = 8.24 \Omega$, $X_L = 5.66 \Omega$
- ข. $R = 8.66 \Omega$, $X_L = 5 \Omega$
- ค. $R = 8 \Omega$, $X_L = 6 \Omega$
- ง. $R = 6.43 \Omega$, $X_L = 7.66 \Omega$
- จ. $R = 6 \Omega$, $X_L = 8 \Omega$



หน่วยที่ 1

จำนวนเชิงซ้อน

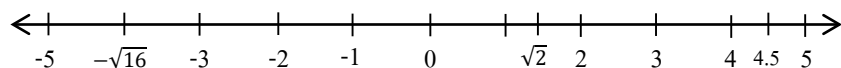
1.1 บทนำ

ในการแก้ปัญหาทางวิศวกรรมไฟฟ้า โดยเฉพาะการวิเคราะห์ปัญหาและคำนวณเพื่อแก้ปัญหาใน วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ การนำจำนวนเชิงซ้อน (Complex Number) เข้ามาใช้ในการวิเคราะห์ จะ เป็นวิธีการหนึ่งที่จะช่วยให้การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้ากระแสสลับนั้น กระทำได้ง่ายยิ่งขึ้น

ซึ่งในหน่วยการเรียนรู้นี้เราจะกล่าวถึง ความหมายของจำนวนเชิงซ้อน รูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน การเปลี่ยนรูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน และการประยุกต์ใช้เครื่องหมายในการเปลี่ยนรูปแบบ Rec – Pol หรือ Pol - Rec เพื่อความสะดวกในการเรียนต่อไป

1.2 จำนวนจริง

จำนวนจริง(Real Number) หมายถึง จำนวนที่มีค่าตามสภาพจริง สามารถนำไปเขียนบน แกนเส้นจำนวนจริงได้ดังรูปที่1.1 จำนวนจริงจะสามารถเขียนอยู่บนแกนเส้นจำนวนจริงที่เป็น แนวนอน โดยมีค่าที่เป็นบวกอยู่ด้านขวาของตำแหน่งศูนย์(0) และค่าที่เป็นลบอยู่ด้านซ้ายของ ตำแหน่งศูนย์(0) นอกจากนี้จำนวนจริงยังสามารถนำไปคำนวณ บวก ลบ คูณ หาร ถอดราก และยกกำลังได้อีกด้วย ยกตัวอย่าง เช่น 3 , $\frac{10}{9}$, 4.5 , $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $-\sqrt{21}$, 5^2 เป็นต้น



รูปที่ 1.1 เส้นแกนจำนวนจริง

1.3 จำนวนจินตภาพ

จำนวนจินตภาพ(Imaginary Number) หมายถึง จำนวนรากที่สองของจำนวนจริงที่ติดค่า ลบทุก ๆ ค่า เช่น $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-100}$ เป็นต้น จำนวนจินตภาพเป็นจำนวนที่เกิดได้จากสมการ ดังต่อไปนี้

$$\text{จาก} \quad x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

$$\therefore x = \sqrt{-1} \quad \dots(1.1)$$

$$\text{หรือจาก} \quad x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = -9$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{-9} \quad (\text{จำนวนที่คูณกันได้ 9 คือ } 3 \times 3)$$

$$x = \sqrt{(3)(3)(-1)}$$

จำนวนเหมือนกัน 2 จำนวนสามารถถอดออกจากรากที่ 2 ได้

$$\therefore x = 3\sqrt{-1} \quad \dots(1.2)$$

จากสมการ(1.1) และ(1.2) จะเห็นได้ว่าเราไม่สามารถนำค่าของ x ไปทำการคำนวณ บวก ลบ คูณ และหาร ต่อไปได้ ดังนั้นจึงต้องแทนที่ค่าจำนวน $\sqrt{-1}$ ด้วย j และเรียกจำนวนรากที่สองของจำนวนจริงที่ค่าติดลบ หรือจำนวนที่มีค่า j คูณร่วมด้วยว่า “จำนวนจินตภาพ” เช่น

$$x = 3\sqrt{-1} = 3j$$

เมื่อเรากำหนดให้

$$j = \sqrt{-1}$$

การคำนวณหาค่า j^n เมื่อ n เป็นจำนวนนับ จึงมีวิธีคำนวณดังนี้

$$j^1 = j$$

$$j^2 = j \times j = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$j^3 = j^2 \times j = (-1)(j) = -j$$

$$j^4 = j^2 \times j^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$j^5 = j^4 \times j = (1)(j) = j$$

$$j^6 = j^4 \times j^2 = (1)(-1) = -1$$

$$j^7 = j^4 \times j^3 = (1)(-j) = -j$$

$$j^8 = j^4 \times j^4 = (1)(1) = 1$$

เนื่องจาก $j^4 = 1$ ดังนั้นตั้งแต่ j^5 เป็นต้นไป ค่าตอบจะวนซ้ำค่าเดิมทั้ง 4 ค่า คือ $j, -1, -j, 1$ โดยผลลัพธ์ของ j^n จะมีค่าเท่าไร ขึ้นอยู่กับว่า n หารด้วย 4 เหลือเศษเท่าไร

$$j^n = \begin{cases} j & \text{เมื่อ 4 หาร } n \text{ เหลือเศษ 1} \\ -1 & \text{เมื่อ 4 หาร } n \text{ เหลือเศษ 2} \\ -j & \text{เมื่อ 4 หาร } n \text{ เหลือเศษ 3} \\ 1 & \text{เมื่อ 4 หาร } n \text{ ลงตัวไม่เหลือเศษ} \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 1.1จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในอยู่ในรูปแบบจำนวนจินตภาพ j

วิธีทำ a) $\sqrt{-8} = \sqrt{(2)(2)(2)(-1)}$ (จำนวนที่คูณกันได้ 8 คือ $2 \times 2 \times 2$)

$$= 2\sqrt{(2)(-1)}$$

$$= 2\sqrt{2}\sqrt{(-1)}$$

$$= j2\sqrt{2}$$

ตอบ

b) $\sqrt{-81} = \sqrt{(9)(9)(-1)}$ (จำนวนที่คูณกันได้ 81 คือ 9×9)

$$= 9\sqrt{(-1)}$$

$$= j9$$

ตอบ

c) $\sqrt{-24} = \sqrt{(2)(2)(6)(-1)}$

$$= 2\sqrt{6}\sqrt{(-1)}$$

$$= j2\sqrt{6}$$

ตอบ**ตัวอย่างที่ 1.2**จงหาค่าต่อไปนี้ a) j^{41} b) j^{100} c) j^{2351}

วิธีทำ a) j^{41} มีค่าเท่าใด
นำ 41 หารด้วย 4 จะได้ค่า 10 ครั้ง เหลือเศษ 1
นั่นคือ $j^{41} = (j^4)^{10} \times j = (1)(j) = j$
 $\therefore j^{41} = j$

ตอบ

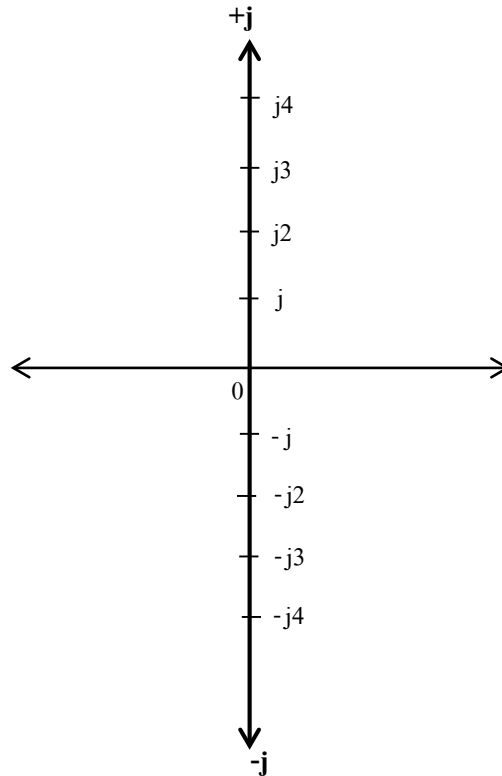
b) j^{100} มีค่าเท่าใด
นำ 100 หารด้วย 4 จะได้ค่า 25 ครั้ง ไม่เหลือเศษ
นั่นคือ $j^{100} = (j^4)^{25} = 1$
 $\therefore j^{100} = 1$

ตอบ

c) j^{2351} มีค่าเท่าใด
นำ 2351 หารด้วย 4 จะได้ค่า 587 ครั้ง เหลือเศษ 3
นั่นคือ $j^{2351} = (j^4)^{587} \times j^3 = (1)(-j)$
 $\therefore j^{2351} = -j$

ตอบ

เมื่อเรารู้จักค่า j แล้วนั้นเราสามารถนำจำนวนจินตภาพ ไปเขียนบนแกนเส้นจำนวนจินตภาพ ได้ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 เส้นแกนจำนวนจินตภาพ

1.4 จำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number) หมายถึง จำนวนที่ประกอบด้วย จำนวนจริง และ จำนวนจินตภาพ จำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบ ดังสมการ(1.3) โดยกำหนดให้ x เรียกว่า “จำนวนจริง” (Real part) และ y เรียกว่า “จำนวนจินตภาพ” (Imaginary part) เขียนอยู่ในรูปแบบได้ดังนี้

$$Z = x \pm jy \quad \dots(1.3)$$

เมื่อ x คือ จำนวนจริงของจำนวนเชิงซ้อน Z (Real part Z , $\text{Re}(Z)$)

y คือ จำนวนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน Z (Imaginary part Z , $\text{Im}(Z)$)

ตัวอย่างที่ 1.3

จงหาส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

วิธีทำ a) $Z = 2 - j7$

จำนวนจริง , x คือ2

จำนวนจินตภาพ , y คือ-7

ตอบ

b) $S = 10$

จำนวนจริง , x คือ10....

จำนวนจินตภาพ , y คือ0

จากโจทย์ไม่มี j

จำนวนจินตภาพจึงเป็น 0

ตอบ

c) $P = j15$

จำนวนจริง , x คือ0

จำนวนจินตภาพ , y คือ-15....

จากโจทย์มีแต่ค่า j

จำนวนจริงจึงเป็น 0

ตอบ

d) $C = -\sqrt{2} - j\sqrt{5}$

จำนวนจริง , x คือ $-\sqrt{2}$

จำนวนจินตภาพ , y คือ $-\sqrt{5}$

ตอบ

ถ้าเรานำจำนวนเชิงซ้อนมา plot ลงบนเส้นแกนจำนวนจริงและเส้นแกนจำนวนจินตภาพ จะทำให้เกิดพื้นที่ระนาบเชิงซ้อน (Complex plane) ออกมา 4 ควอดรนต์ ได้ดังรูปที่ 1.3

กำหนดให้

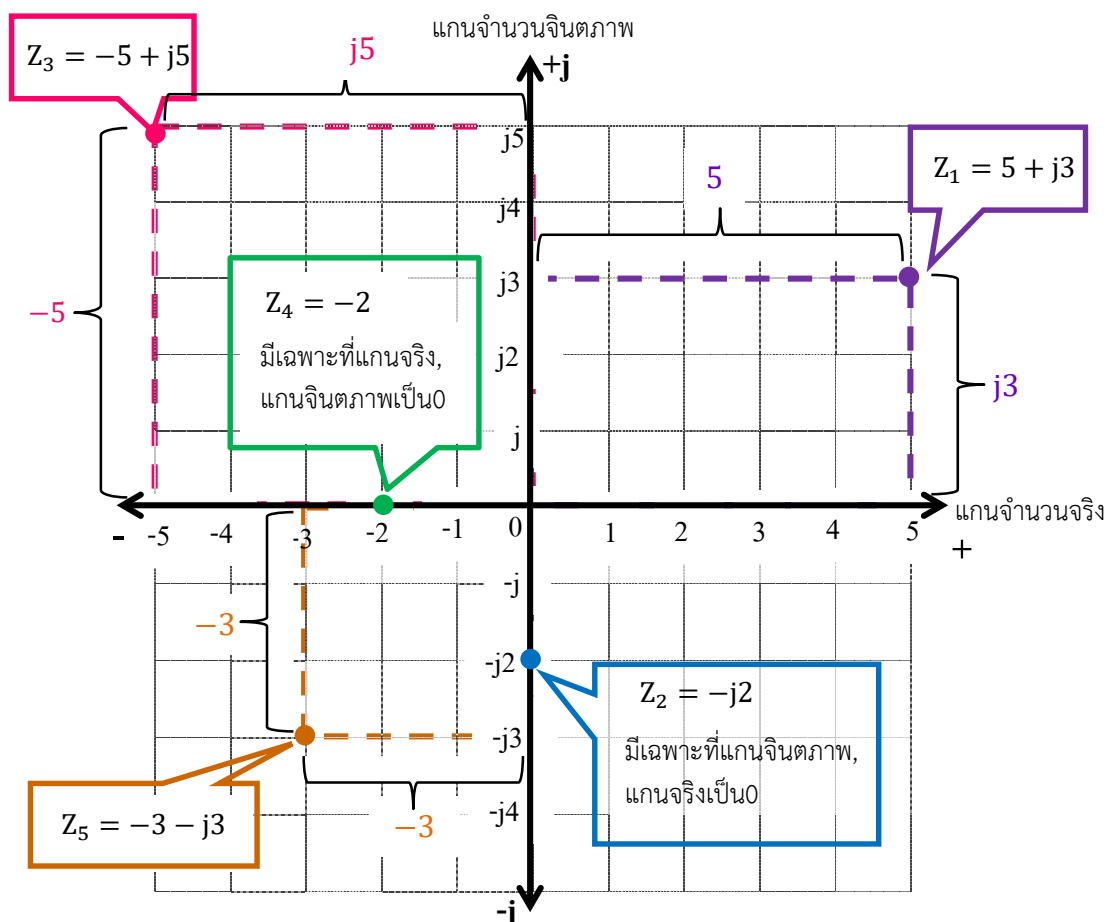
a) $Z_1 = 5 + j3$

b) $Z_2 = -j2$

c) $Z_3 = -4 + j2$

d) $Z_4 = -2$

e) $Z_5 = -3 - j3$



รูปที่ 1.3 แกนพื้นที่ระนาบเชิงซ้อน

ตัวอย่างที่ 1.4

จงกำหนดจุดแทนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

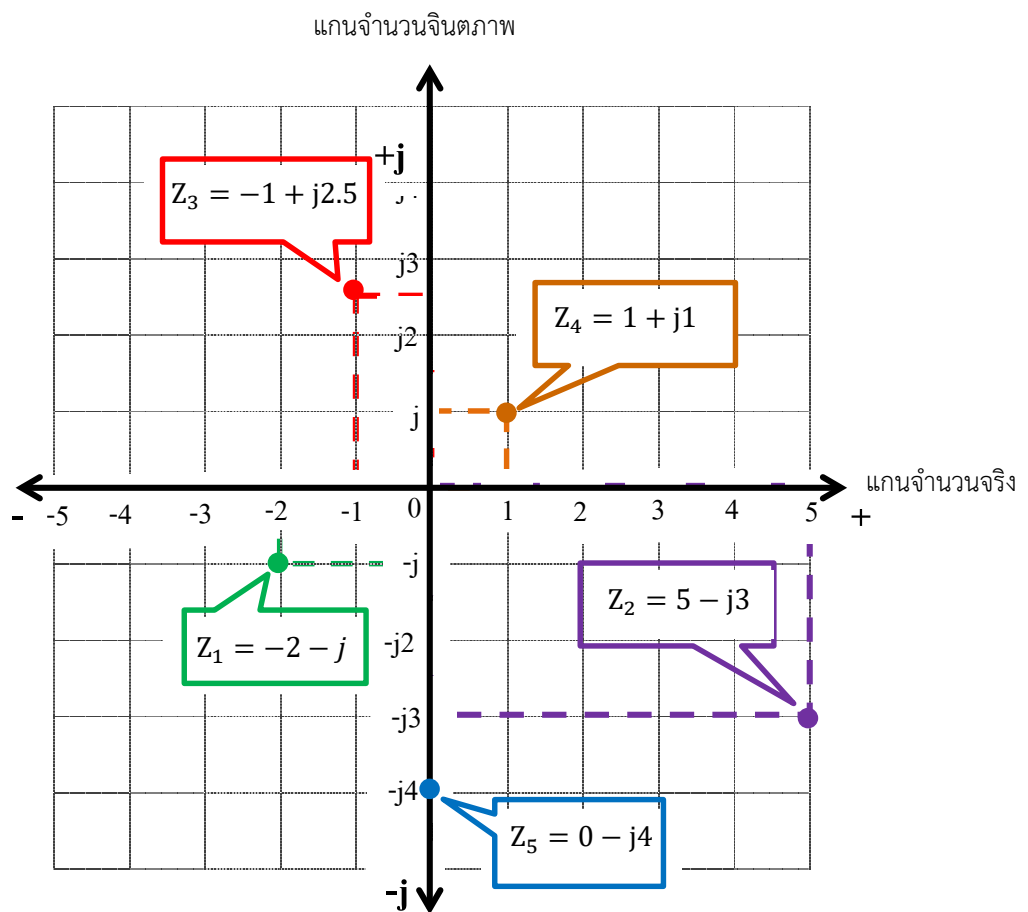
$$Z_1 = -2 - j$$

$$Z_2 = 5 - j3$$

$$Z_3 = 1 + j2.5$$

$$Z_4 = -4$$

$$Z_5 = 0 - j4$$



รูปที่ 1.4 แสดงแกนพื่นระนาบเชิงซ้อน

1.5 รูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนได้เป็น 4 รูปแบบ การนำจำนวนเชิงซ้อนแต่ละรูปแบบไปใช้งานขึ้นอยู่กับลักษณะของการวิเคราะห์ปัญหาและการคำนวณ รูปแบบของจำนวนเชิงซ้อนมีดังนี้

1.5.1 จำนวนเชิงซ้อน Rectangular form คือ จำนวนเชิงซ้อนที่เขียนอยู่ในรูปแบบจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ $Z = x \pm jy$ เช่น $8 + j2$, $-6 - j7$, $j100$ เป็นต้น

1.5.2 จำนวนเชิงซ้อน Polar form คือ จำนวนเชิงซ้อนที่เขียนอยู่ในรูปแบบของขนาดและมุม $Z = r\angle\theta^\circ$ (โดย θ เป็นมุมที่อยู่ในหน่วยองศา) เช่น $10\angle 20^\circ, 1.8\angle -10^\circ$ เป็นต้น

1.5.3 จำนวนเชิงซ้อน Trigonometric form คือ จำนวนเชิงซ้อนที่เขียนอยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันตรีโกณมิติ $Z = r\cos\theta^\circ \pm jr\sin\theta^\circ$ หรือ $Z = r(\cos\theta^\circ \pm j\sin\theta^\circ)$ เช่น $5\cos(10^\circ) - j5\sin(10^\circ)$ หรือ $20(\cos 25^\circ + j\sin 25^\circ)$ เป็นต้น

1.5.4 จำนวนเชิงซ้อน Exponential form คือ จำนวนเชิงซ้อนที่เขียนอยู่ในรูปแบบของขนาดและค่า e ยกกำลัง $Z = re^{\pm j\theta}$ (โดย θ เป็นมุมที่อยู่ในหน่วยเรเดียน) เช่น $3e^{j0.8}, 20e^{-j1.4}$ เป็นต้น

1.6 การเปลี่ยนรูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน

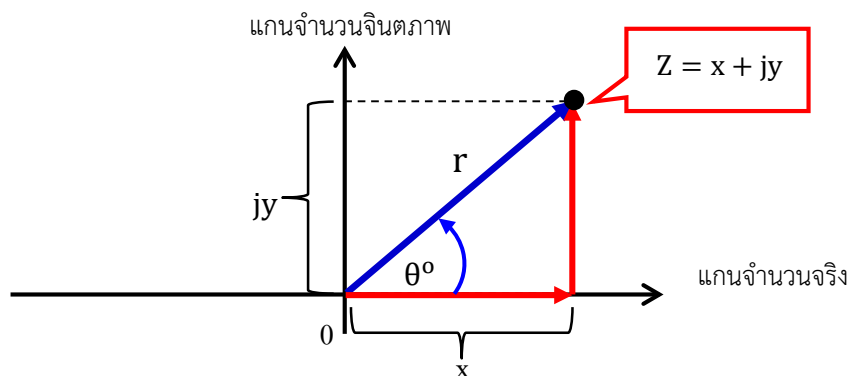
จำนวนเชิงซ้อนสามารถเปลี่ยนจากรูปแบบหนึ่งไปสู่อีกรูปแบบอื่น ๆ ได้เนื่องจากในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ จำนวนเชิงซ้อนบางรูปแบบคำนวณได้เฉพาะการคูณและหารเท่านั้น ไม่สามารถทำการบวกหรือลบได้ ดังนั้น เพื่อให้เกิดความสะดวกและง่ายต่อการคำนวณจึงต้องมีการเปลี่ยนรูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน ดังกล่าว

1.6.1 การเปลี่ยนรูปจำนวนเชิงซ้อนจาก Rectangular form ไปเป็น Polar form

$$Z = x + jy \Rightarrow r\angle\theta^\circ$$

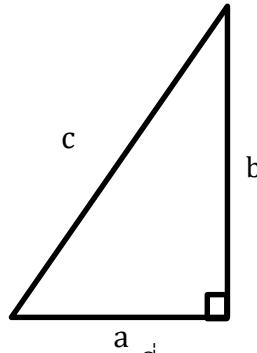
$$Z = x - jy \Rightarrow r\angle -\theta^\circ$$

- เมื่อ
- x คือ จำนวนจริงของ Z
 - y คือ จำนวนจินตภาพของ Z
 - r คือ ขนาดความยาวของเวกเตอร์ $Z, |Z|$
 - θ คือ มุมของเวกเตอร์ Z ที่กระทำกับแกนจำนวนจริง



รูปที่ 1.5 การเปลี่ยนรูปของ $Z = x + jy \Rightarrow r\angle\theta^\circ$

กำหนดให้ $Z = x + jy$ เมื่อนำมาเขียนลงบนพื้นระนาบเชิงซ้อนจะได้ดังรูปที่ 1.5 จุด Z เกิดจากค่าจำนวนจริง x รวมกับค่าจำนวนจินตภาพ y ทำให้เกิดเวกเตอร์ผลลัพธ์ขึ้นมา คือ เวกเตอร์ Z ขนาดของเวกเตอร์ Z เขียนแทนด้วย $|Z|$ ซึ่งมีความยาวเป็น r หน่วย เราสามารถหา $|Z|$ หรือ r ได้โดยการใช้ทฤษฎีสามเหลี่ยมมุมฉากของพีทาโกรัสดังรูปที่ 1.6 การเขียนสมการพีทาโกรัสเขียนได้ดังสมการ (1.4) และ (1.5)



รูปที่ 1.6 สามเหลี่ยมมุมฉาก

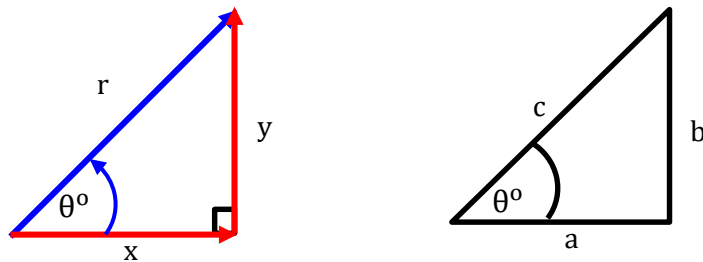
$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \dots(1.4)$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \dots(1.5)$$

โดยที่

c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก

a และ b เป็นความยาวของด้านประชิดมุมฉาก



รูปที่ 1.7 การเปรียบเทียบสามเหลี่ยมมุมฉาก

จากรูปที่ 1.7 เป็นการเปรียบเทียบระหว่างรูปที่ 1.5 และรูปที่ 1.6 ด้าน r เปรียบได้กับด้าน c , ด้าน x เปรียบได้กับด้าน a และด้าน y เปรียบได้กับด้าน b ดังนั้นเราสามารถหา r หรือ $|Z|$ ได้ดังนี้คือ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \dots(1.6)$$

และเราสามารถหาค่า θ ได้จากอัตราส่วนตรีโกณมิติ นั่นคืออัตราส่วนของความยาวด้านสองด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีวิธีการหาดังนี้

$$\sin \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{y}{r} \quad \dots(1.7)$$

$$\cos \theta = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{x}{r} \quad \dots(1.8)$$

$$\tan \theta = \frac{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta} = \frac{y}{x} \quad \dots(1.9)$$

เราหาค่ามุม θ ได้โดยเลือกสมการ (1.9) เนื่องจากหาค่าได้สะดวกกว่า เพราะค่า x และค่า y มีการกำหนดมาให้เรียบร้อยแล้ว

$$\text{จาก} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

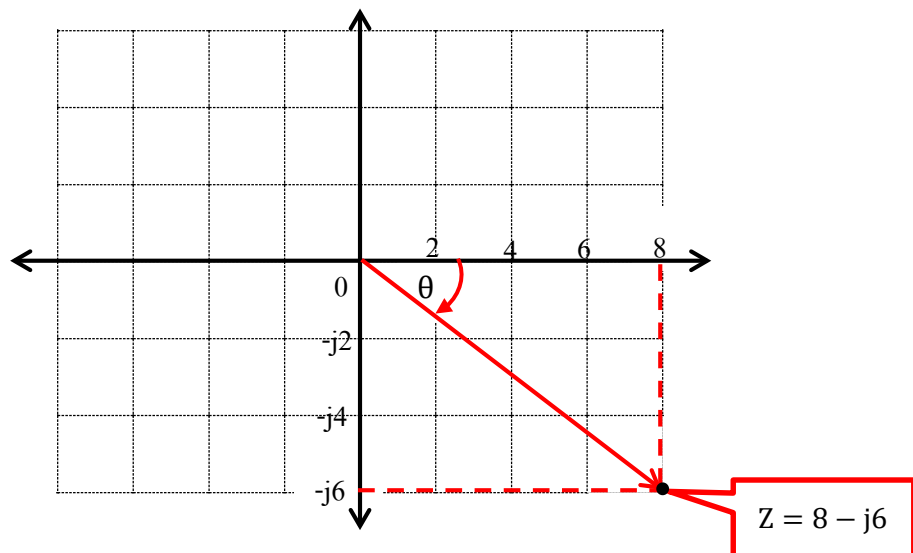
$$\therefore \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad \dots(1.10)$$

ตัวอย่างที่ 1.5

จงเปลี่ยนรูปจำนวน Rectangular form ต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูป Polar form

a) $Z = 8 - j6$

วิธีทำ



รูปที่ 1.8 เวกเตอร์จำนวนเชิงซ้อน $Z = 8 - j6$

จากโจทย์ $Z = 8 - j6$ นั่นคือ $x = 8$ และ $y = -6$

หาขนาดของ Z

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|Z| = \sqrt{8^2 + (-6)^2}$$

$$|Z| = \sqrt{100} = 10 \text{ หน่วย}$$

หาขนาดของมุม θ

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-6}{8} \right) = -36.87^\circ$$

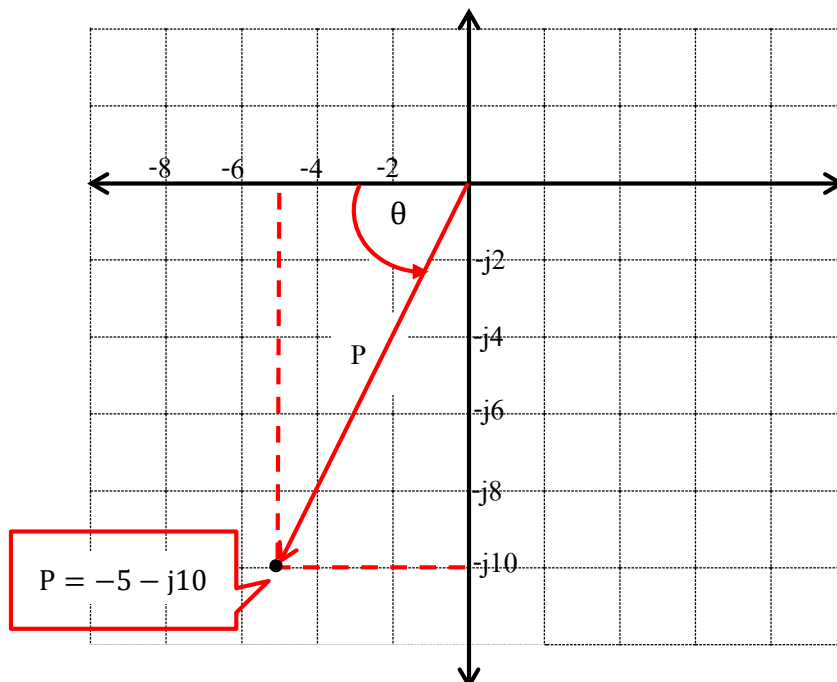
จากรูปที่ 1.8 จะเห็นว่าเวกเตอร์ Z อยู่ใน ควอดรนต์ที่ 4 ซึ่งจะต้องมีมุมบวกอยู่ระหว่าง 270° ถึง 360° หรือ มีมุมลบอยู่ระหว่าง 0° ถึง -90° เท่านั้น

ดังนั้นมุมที่แท้จริงของเวกเตอร์ Z คือ -36.87° หรือ $360^\circ - 36.87^\circ = 323.13^\circ$

$$\therefore Z = 8 - j6 = 10 \angle -36.87^\circ \text{ หรือ } 10 \angle 323.13^\circ \quad \text{ตอบ}$$

b) $P = -5 - j10$

วิธีทำ



รูปที่ 1.9 เวกเตอร์จำนวนเชิงซ้อน $P = -5 - j10$

จากโจทย์ $P = -5 - j10$ นั่นคือ $x = -5$ และ $y = -10$

$$|P| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|P| = \sqrt{(-5)^2 + (-10)^2}$$

$$|P| = \sqrt{125} = 11.18 \text{ หน่วย}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-10}{-5} \right) = 63.43^\circ$$

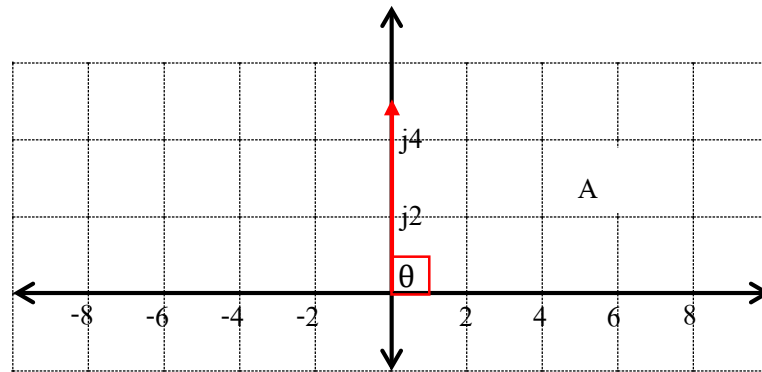
จากรูปที่ 1.9 จะเห็นว่าเวกเตอร์ P อยู่ในควอดแรนต์ที่ 3 ซึ่งจะต้องมีมุมบวกตั้งแต่ 180° ถึง 270° หรือมีมุมลบอยู่ระหว่าง -90° ถึง -180° เท่านั้น

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้นมุมที่แท้จริงของเวกเตอร์ P คือ } 180^\circ + 63.43^\circ &= 243.43^\circ \quad \text{หรือ} \\ -180^\circ + 63.43^\circ &= -116.57^\circ \end{aligned}$$

$$\therefore P = -5 - j10 = 11.18 \angle 243.43^\circ \quad \text{หรือ} \quad 11.18 \angle -116.57^\circ \quad \text{ตอบ}$$

c) $A = j5$

วิธีทำ



รูปที่ 1.10 เวกเตอร์จำนวนเชิงซ้อน $A = j5$

จากโจทย์ $A = j5$ นั่นคือ $x = 0$ และ $y = 5$

$$|A| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|A| = \sqrt{0^2 + 5^2}$$

$$|A| = \sqrt{25} = 5 \quad \text{หน่วย}$$

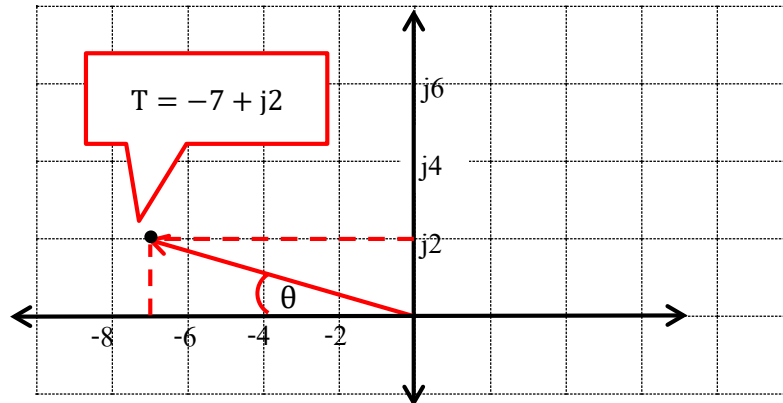
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{5}{0} \right) = 90^\circ$$

$$\therefore A = j5 = 5 \angle 90^\circ \quad \text{ตอบ}$$

d) $T = -7 + j2$

วิธีทำ



รูปที่ 1.11 เวกเตอร์จำนวนเชิงซ้อน $T = -7 + j2$

จากโจทย์ $T = -7 + j2$ นั่นคือ $x = -7$ และ $y = 2$

$$|T| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|T| = \sqrt{(-7)^2 + 2^2}$$

$$|T| = \sqrt{53} = 7.28 \text{ หน่วย}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2}{-7} \right) = -15.95^\circ$$

จากรูปที่ 1.11 จะเห็นว่าเวกเตอร์ T อยู่ในควอดรันต์ที่ 2 ซึ่งจะต้องมีมุมบวกตั้งแต่ 90° ถึง 180° หรือมีมุมลบอยู่ระหว่าง -180° ถึง -270° เท่านั้น

ดังนั้นมุมที่แท้จริงของเวกเตอร์ T คือ $180^\circ - 15.95^\circ = 164.05^\circ$ หรือ $-180^\circ - 15.95^\circ = -195.95^\circ$

$\therefore T = -7 + j2 = 7.28 \angle 164.05^\circ$ หรือ $7.28 \angle -195.95^\circ$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 1.6

วงจรไฟฟ้าวงจรหนึ่งประกอบด้วย $R = 20 \, \Omega$ ต่ออนุกรมกับ $X_L = 10 \, \Omega$
จงหาค่าอิมพีแดนซ์รวมของวงจรนี้ในรูปของ Polar form

วิธีทำ อิมพีแดนซ์อนุกรม

$$Z = R + jX_L$$

เมื่อ

$$R = 20 \, \Omega, \quad X_L = 10 \, \Omega$$

$\therefore$

$$Z = 20 + j10 \, \Omega$$

หาขนาดของ Z ,

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

$$|Z| = \sqrt{20^2 + 10^2}$$

$$|Z| = 22.36 \, \Omega$$

หาขนาดของมุม θ ,

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{X_L}{R} \right)$$

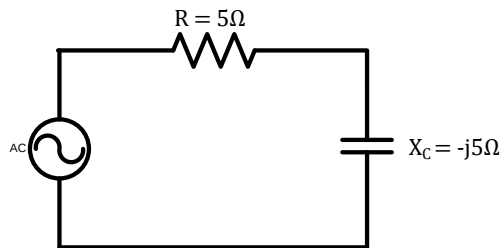
$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{10}{20} \right) = 26.57^\circ$$

$$\therefore Z = 20 + j10 = 22.36 \angle 26.57^\circ \, \Omega$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.7

วงจรดังรูปที่ 1.12 จงหาค่าอิมพีแดนซ์รวมวงจรในรูปของ Polar form



รูปที่ 1.12 วงจรอนุกรม RC

วิธีทำ อิมพีแดนซ์อนุกรม

$$Z = R - jX_C$$

เมื่อ

$$R = 5 \, \Omega, \quad X_C = 5 \, \Omega$$

$$\therefore Z = 5 - j5 \, \Omega$$

หาขนาดของ Z

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

$$|Z| = \sqrt{5^2 + (-5)^2}$$

$$|Z| = \sqrt{50} = 7.07 \, \Omega$$

หาขนาดของมุม θ

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{X_C}{R} \right)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-5}{5} \right) = -45^\circ$$

$$\therefore Z = 5 - j5 = 7.07 \angle -45^\circ \, \Omega$$

ตอบ

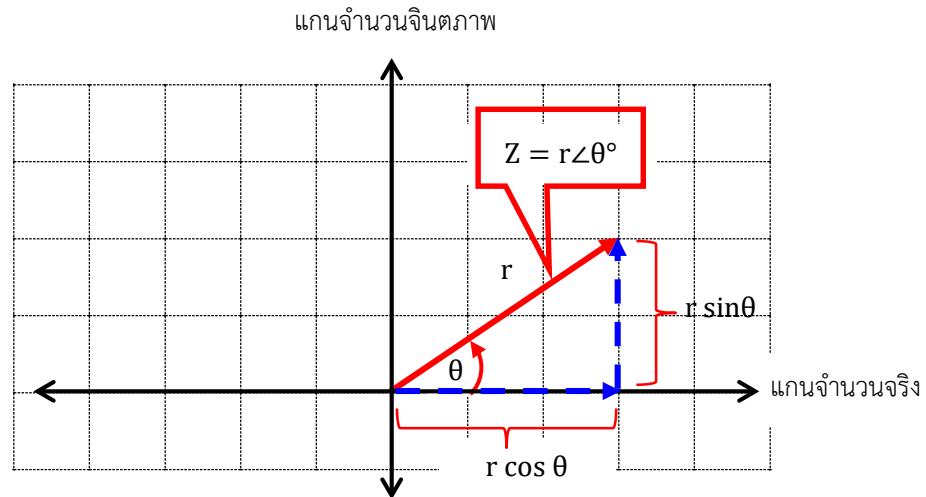
1.6.2 การเปลี่ยนรูปจำนวนเชิงซ้อนแบบ Polar form ไปเป็น Rectangular form

$$Z = r \angle \theta^\circ \Rightarrow x + jy$$

$$Z = r \angle -\theta^\circ \Rightarrow x - jy$$

จากรูปที่ 1.13 กำหนดให้ $Z = r \angle \theta^\circ$

เมื่อ r คือ ขนาดความยาวของเวกเตอร์ $Z, |Z|$
 θ คือ มุมของเวกเตอร์ Z ที่กระทำกับแกนจำนวนจริง



รูปที่ 1.13 พื้นระนาบเชิงซ้อนแบบ Polar form

เมื่อเราแยกเวกเตอร์ Z ซึ่งมีขนาด r เข้าสู่ด้านประชิดมุม θ (แนวนอน) จะมีค่า $r \cos \theta$ และเมื่อแยกเวกเตอร์ Z เข้าสู่ด้านตรงกันข้ามกับมุม θ (แนวตั้ง) จะมีค่า $r \sin \theta$

กำหนดให้ $x = r \cos \theta$... (1.11)

$y = r \sin \theta$... (1.12)

จาก $Z = r \angle \theta^\circ$

$$= \underbrace{r \cos \theta}_x \pm j \underbrace{r \sin \theta}_y$$

$Z = x \pm jy$

*การเปลี่ยนรูปจำนวนเชิงซ้อนจาก Polar form ไปเป็นแบบ Rectangular form นั้น จำเป็นจะต้องใช้รูปแบบ Trigonometric form ในการเปลี่ยนรูปแบบ

ตัวอย่างที่ 1.8

จงเปลี่ยนรูปจำนวนเชิงซ้อน Polar form ให้อยู่ในรูป Rectangular form

a) $Z = 5 \angle -20^\circ$

วิธีที่ 1

$$\begin{aligned} Z &= 5 \cos 20^\circ - j5 \sin 20^\circ \\ &= 4.698 - j1.71 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2

$$\begin{aligned} Z &= 5(\cos 20^\circ - j \sin 20^\circ) \\ &= 5(0.9396 - j0.342) \\ &= 4.698 - j1.71 \end{aligned}$$

$\therefore Z = 5 \angle -20^\circ = 4.698 - j1.71$

ตอบ

b) $T = 6.67 \angle 30^\circ$

วิธีที่ 1

$$\begin{aligned} T &= 6.67 \cos 30^\circ + j6.67 \sin 30^\circ \\ &= 5.776 + j3.335 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2

$$\begin{aligned} T &= 6.67(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) \\ &= 6.67(0.866 + j0.5) \\ &= 5.776 + j3.335 \end{aligned}$$

$$\therefore T = 6.67 \angle 30^\circ = 5.776 + j3.335$$

ตอบ

c) $Q = 9 \angle 275^\circ$

วิธีที่ 1

$$\begin{aligned} Q &= 9 \cos 275^\circ + j9 \sin 275^\circ \\ &= 0.784 - j8.966 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2

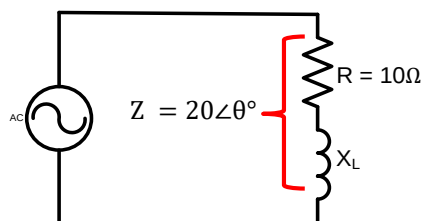
$$\begin{aligned} Q &= 9(\cos 275^\circ + j \sin 275^\circ) \\ &= 9(0.0872 - j0.9962) \\ &= 0.784 - j8.966 \end{aligned}$$

$$\therefore Q = 9 \angle 275^\circ = 0.784 - j8.966$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.9

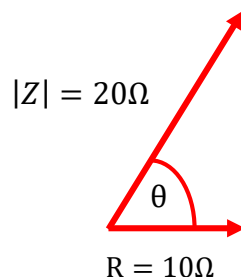
วงจรดังรูปที่ 1.14 มี $Z = 20 \angle \theta^\circ \Omega$ ในวงจรประกอบด้วย $R = 10 \Omega$ และ X_L ต่ออนุกรมกัน จงคำนวณหาค่ามุม θ และค่า X_L



รูปที่ 1.14 วงจรอนุกรม R-L

วิธีทำ

จาก $Z = 20 \angle \theta^\circ$ นั่นคือ ขนาดของ $|Z| = r = 20 \Omega$ และ $Z = R + jX_L$



รูปที่ 1.15 เวกเตอร์ $Z = 20 \angle \theta^\circ = 10 + jX_L$

$$\text{จากสมการ (1.8)} \quad \cos \theta = \frac{\text{ความยาวด้านประชิดมุม } \theta}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\cos \theta = \frac{R}{Z} = \frac{10}{20}$$

ถ้าต้องการหา θ ทำการย้าย $\cos$ ไปด้านตรงข้าม

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{10}{20}\right) = 60^\circ$$

ดังนั้น $Z = 20 \angle 60^\circ$ หรือ $Z = 10 + j17.32 \, \Omega$

$$\therefore X_L = 17.32 \, \Omega$$

ตอบ

1.6.3 การเปลี่ยนรูปจำนวนเชิงซ้อนแบบ Polar form ให้อยู่ในรูป Exponential form

จาก Polar form , $Z = r \angle \theta^\circ$

และ Trigonometric form , $Z = r (\cos \theta^\circ + j \sin \theta^\circ)$

แต่จากสมการออยเลอร์, $e^{j\theta} = (\cos \theta + j \sin \theta)$

ดังนั้น

$$r \angle \theta^\circ = r e^{j\theta}$$

...(1.13)

หมายเหตุ จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบ Polar form , $r \angle \theta^\circ$ มุม θ จะมีหน่วยเป็นองศา แต่จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบ Exponential form, $r e^{j\theta}$ มุม θ นี้จะมีหน่วยเป็นเรเดียน (radian) ดังนั้นจึงต้องมีการเปลี่ยนค่าของมุมในหน่วย “องศา” ให้เป็นมุมที่มีหน่วยเป็น “เรเดียน”

การเปลี่ยนมุม จากหน่วย องศา เป็น เรเดียน

จาก มุม $180^\circ =$ มุม π เรเดียน

$$\text{มุม } 1^\circ = \text{มุม } \frac{\pi}{180^\circ} \text{ เรเดียน}$$

ดังนั้น

$$\text{มุม } A^\circ = \text{มุม } \frac{\pi}{180^\circ} \times A^\circ \text{ เรเดียน}$$

...(1.14)

เมื่อ A° คือ มุมใดๆที่มีหน่วยเป็นองศา

ตัวอย่างที่ 1.10

จงเปลี่ยนรูปจำนวนเชิงซ้อน Polar form ให้อยู่ในรูป Exponential form

a) $S = 10 \angle 50^\circ$

วิธีทำ เปลี่ยนมุม 50° ให้เป็นมุมเรเดียนโดยใช้สมการ (1.14)

$$50^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \times 50^\circ$$

$$50^\circ = 0.827 \text{ เรเดียน}$$

$$\therefore S = 10 \angle 50^\circ = 10 e^{j0.827}$$

ตอบ

b) $A = 3\angle 220^\circ$

วิธีทำ เปลี่ยนมุม 220° ให้เป็นมุมเรเดียนโดยใช้สมการ (1.14)

$$220^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \times 220^\circ$$

$$220^\circ = 3.839 \text{ เรเดียน}$$

$$\therefore A = 3\angle 220^\circ = 3e^{j3.839}$$

ตอบ

1.6.4 การเปลี่ยนรูปจำนวนเชิงซ้อนแบบ Exponential form ให้อยู่ในรูป Polar form

จาก Exponential form , $Z = r e^{j\theta}$

เป็น Polar form , $Z = r\angle\theta^\circ$

หมายเหตุ จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบ Exponential form, $r e^{j\theta}$ มุม θ นี้จะมีหน่วยเป็นเรเดียน (radian) แต่จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบ Polar form , $r\angle\theta^\circ$ มุม θ จะมีหน่วยเป็นองศา ดังนั้นจึงต้องมีการเปลี่ยนค่าของมุมในหน่วย “ เรเดียน ” ให้เป็นมุมที่มีหน่วยเป็น “ องศา ”

การเปลี่ยนมุม จากหน่วย เรเดียน เป็น องศา

จาก มุม π เรเดียน = มุม 180°

$$\text{มุม } 1 \text{ เรเดียน} = \text{มุม } \frac{180^\circ}{\pi}$$

ดังนั้น $\text{มุม } B \text{ เรเดียน} = \text{มุม } \frac{180^\circ}{\pi} \times B \quad \dots(1.15)$

เมื่อ B คือ มุมใดๆที่มีหน่วยเป็น เรเดียน

ตัวอย่างที่ 1.11

จงเปลี่ยนรูปจำนวนเชิงซ้อน Exponential form ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบ Polar form

a) $P = 3.9e^{j0.05}$

วิธีทำ เปลี่ยนมุม 0.05 เรเดียนให้เป็นมุมองศาโดยใช้สมการ (1.15)

$$0.05 \text{ เรเดียน} = \frac{180^\circ}{\pi} \times 0.05$$

$$0.05 \text{ เรเดียน} = 2.87^\circ$$

$$\therefore P = 3.9e^{j0.05} = 3.9\angle 2.87^\circ$$

ตอบ

$$b) T = 109e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

วิธีทำ เปลี่ยนมุม $-\frac{\pi}{4}$ เรเดียนให้เป็นมุมองศาโดยใช้สมการ (1.15)

$$\text{มุม } -\frac{\pi}{4} \text{ เรเดียน} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{มุม } -\frac{\pi}{4} \text{ เรเดียน} = -45^\circ$$

$$\therefore T = 109e^{-j\frac{\pi}{4}} = 109\angle -45^\circ$$

ตอบ

$$c) Y = 0.9e^{j\frac{3\pi}{4}}$$

วิธีทำ เปลี่ยนมุม $\frac{3\pi}{4}$ เรเดียนให้เป็นมุมองศาโดยใช้สมการ (1.15)

$$\text{มุม } \frac{3\pi}{4} \text{ เรเดียน} = \frac{180^\circ}{\pi} \times \left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

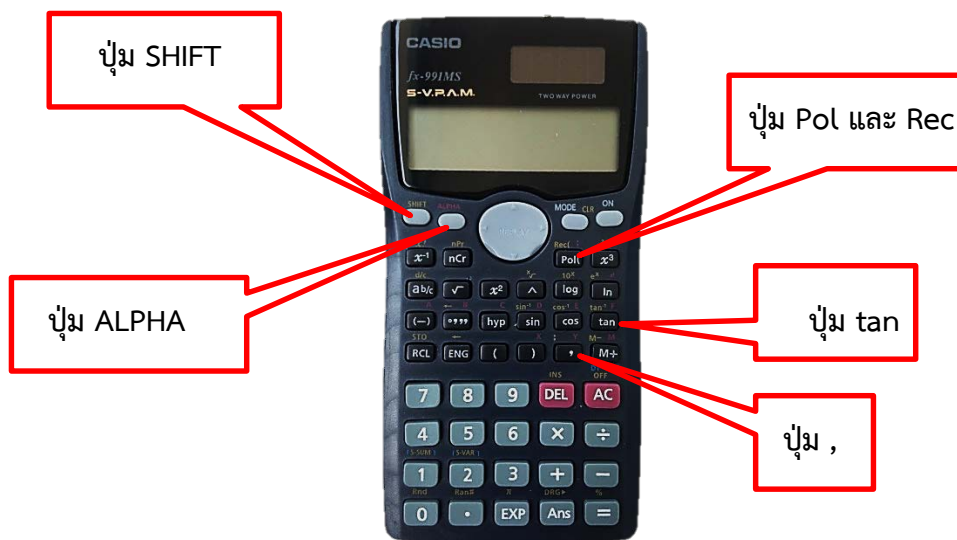
$$\text{มุม } \frac{3\pi}{4} \text{ เรเดียน} = 135^\circ$$

$$\therefore Y = 0.9e^{j\frac{3\pi}{4}} = 0.9\angle 135^\circ$$

ตอบ

1.7 การใช้เครื่องคำนวณในการเปลี่ยนรูปจำนวนเชิงซ้อน

1.7.1 เครื่องคำนวณ CASIO รุ่น fx-991MS



รูปที่ 1.16 เครื่องคำนวณCASIO รุ่นfx-991MS

1.7.1.1 เปลี่ยนรูปจากรูปแบบ Rectangular form ไปเป็น Polar form เช่น ถ้าต้องการเปลี่ยน $3 + j4$ ไปเป็น Polar form กระทำได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กดแป้น Pol หน้าจอจะปรากฏ

Pol (

ขั้นตอนที่ 2 จากนั้นใส่ค่าจำนวนจริง (ค่า 3) ตามด้วยเครื่องหมายจุลภาค (,) และใส่ค่าจำนวนจินตภาพ (ค่า 4) วงเล็บปิด เมื่อกดเครื่องหมายเท่ากับ (=) จะได้ค่า r คือ 5

Pol (3,4)

5

ขั้นตอนที่ 3 กดแป้น ALPHA ตามด้วยกดแป้น tan หน้าจอปรากฏตัวอักษร

F =

ขั้นตอนที่ 4 กดเครื่องหมายเท่ากับ (=) จะได้ค่ามุม θ คือ 53.13

F = 53.1301023

การแปลงค่า

$3 + j4$

คำตอบคือ

$5 \angle 53.13^\circ$

1.7.1.2 เปลี่ยนรูปจากรูปแบบ Polar form ไปเป็น Rectangular form เช่น ถ้าต้องการเปลี่ยน $5 \angle 20^\circ$ สามารถกระทำได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กดแป้น SHIFT ตามด้วยแป้น Pol หน้าจอจะปรากฏ

Rec(

ขั้นตอนที่ 2 จากนั้นใส่ค่าขนาด r (ค่า 5) ตามด้วยเครื่องหมายจุลภาค (,) และใส่ค่ามุม θ (ค่า 20) วงเล็บปิด เมื่อกดเครื่องหมายเท่ากับ (=) ค่าที่ได้ คือ จำนวนจริง

Rec(5,20)

4.698463

ขั้นตอนที่ 3 กดแป้น ALPHA ตามด้วยแป้น tan หน้าจอปรากฏตัวอักษร

F =

ขั้นตอนที่ 4 กดเครื่องหมายเท่ากับ (=) จะได้ ค่าจำนวนจินตภาพ คือ

$$F = 1.710100717$$

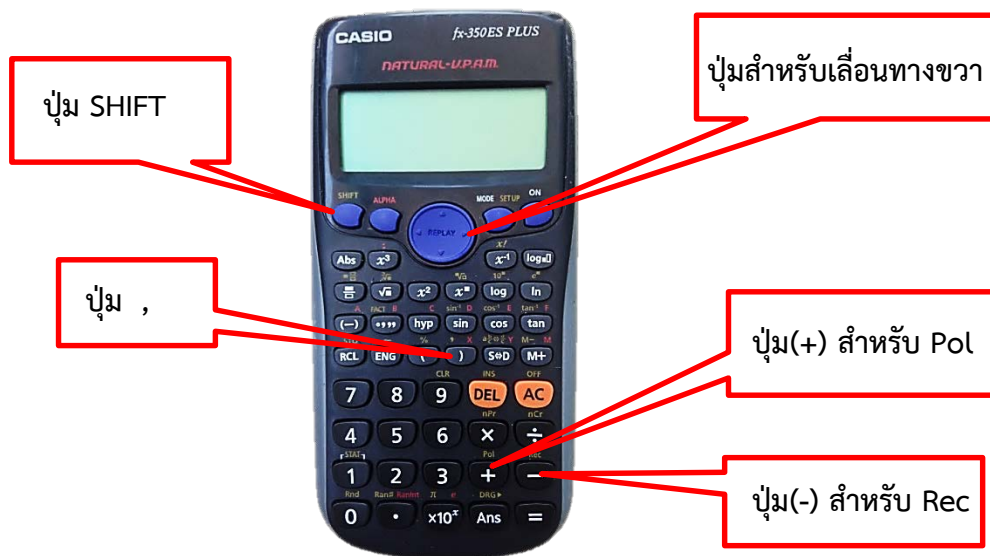
การแปลงค่า

$$5\angle 20^\circ$$

คำตอบคือ

$$4.698 + j1.71$$

1.7.2 เครื่องคำนวณ CASIO รุ่น $fx-350ES PLUS$



รูปที่ 1.17 เครื่องคำนวณ CASIO รุ่น $fx-350ES PLUS$

1.7.2.1 เปลี่ยนรูปจากรูปแบบ Rectangular form ไปเป็น Polar form โดยใช้แป้นเครื่องหมายบวก(+) ซึ่งจะมีสัญลักษณ์ Pol อยู่ด้านล่างและถ้าต้องการเปลี่ยน $3 + j4$ ไปเป็น Polar form กระทำได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 กดแป้น SHIFT , กดแป้น + จากนั้นใส่ค่าจำนวนจริง (ค่า 3)

$$\text{Pol}(3$$

ขั้นตอนที่ 2 ใส่เครื่องหมาย , และค่าจำนวนจินตภาพ (ค่า 4)

$$\text{Pol}(3 , 4)$$

ขั้นตอนที่ 3 เมื่อกดเครื่องหมายเท่ากับ(=) จะได้ค่า r คือ 5 และ θ คือ 53.130102

$$\text{Pol}(3 , 4)$$

$$r = 5, \theta = 53.130102$$

การแปลงค่า $3 + j4$ คำตอบคือ $5\angle 53.13^\circ$

1.7.2.2 เปลี่ยนรูปจากรูปแบบ Polar form ไปเป็น Rectangular form โดยการใช้แป้นเครื่องหมายลบ – ซึ่งจะมีสัญลักษณ์ Rec อยู่ด้านล่าง และถ้าต้องการเปลี่ยน $5\angle 20^\circ$ สามารถกระทำดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 กดแป้น SHIFT , กดแป้น – จากนั้นใส่ค่าขนาด r (ค่า 5)

Rec(5

ขั้นตอนที่ 2 ใส่เครื่องหมาย , และค่ามุม θ (ค่า 20)

Rec(5 , 20)

ขั้นตอนที่ 3 เมื่อกดเครื่องหมายเท่ากับ (=) จะได้ค่า x คือ 4.698463104

Rec(5 , 20)
x = 4.698463104, y =

ขั้นตอนที่ 4 ใช้เครื่องหมายลูกศรเลื่อนไปทางขวา ค่า y คือ 1.710100717

Rec(5 , 20)
x = 4.698463104, y =

Rec(5 , 20)
y = 1.710100717

การแปลงค่า $5\angle 20^\circ$ คำตอบคือ $4.698 + j1.71$

1.8 บทสรุป

1.8.1 จำนวนจริงคือ จำนวนที่มีค่าตามสภาพจริง สามารถนำไปเขียนบนแกนเส้นจำนวนจริง เช่น $1, 5, 0.006, -3.9, \sqrt{3}$ เป็นต้น

1.8.2 จำนวนจินตภาพ คือ จำนวนรากที่สองของจำนวนจริงที่ติดค่าลบ เช่น $\sqrt{-1}, \sqrt{-44}$ เป็นต้น หรือเรียกจำนวนที่มีค่า j คูณรวมอยู่ด้วยว่า “จำนวนจินตภาพ”

1.8.3 กำหนดให้ $j = \sqrt{-1}$

$$j^2 = -1$$

$$j^3 = -j$$

$$j^4 = 1$$

1.8.4 จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนที่ประกอบด้วย จำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ

1.8.5 รูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน เขียนได้ 4 รูปแบบ คือ

- 1) Rectangular form เช่น $Z = x \pm jy$
- 2) Polar form เช่น $Z = r \angle \pm \theta^\circ$
- 3) Trigonometric form เช่น $Z = r \cos \theta^\circ \pm j r \sin \theta^\circ$ หรือ $r(\cos \theta^\circ \pm j \sin \theta^\circ)$
- 4) Exponential form เช่น $Z = re^{\pm j\theta}$ (โดย θ มีหน่วยเป็น เรเดียน)

1.8.6 การเปลี่ยนรูปแบบจำนวนเชิงซ้อน

- 1) การเปลี่ยนรูปจำนวนเชิงซ้อนจาก Rectangular form เป็น Polar form

$$Z = x \pm jy \Rightarrow r \angle \pm \theta^\circ$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

- 2) การเปลี่ยนรูปจำนวนเชิงซ้อนจาก Polar form เป็น Rectangular form

$$Z = r \angle \pm \theta^\circ \Rightarrow x \pm jy$$

$$x = r \cos \theta^\circ$$

$$y = r \sin \theta^\circ$$

- 3) การเปลี่ยนรูปจำนวนเชิงซ้อนจาก Polar form เป็น Exponential form

$$Z = r \angle \pm \theta^\circ \Rightarrow re^{\pm j\theta}$$

การเปลี่ยนมุม จากหน่วย องศา เป็น เรเดียน

$$\text{มุมเรเดียน} = \text{มุม} \frac{\pi}{180^\circ} \times A^\circ$$

- 4) การเปลี่ยนรูปจำนวนเชิงซ้อนจาก Exponential form เป็น Polar form

$$Z = re^{\pm j\theta} \Rightarrow r \angle \pm \theta^\circ$$

การเปลี่ยนมุม จากหน่วย เรเดียน เป็น องศา

$$\text{มุมองศา} = \text{มุม} \frac{180^\circ}{\pi} \times B \text{ เรเดียน}$$

แบบฝึกหัดหน่วยที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน

จงแสดงวิธีทำ และตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบ j

1.1 $\sqrt{-125} = \dots\dots\dots$

1.2 $\sqrt{-90} = \dots\dots\dots$

2. จงหาค่าของจำนวนจินตภาพต่อไปนี้

2.1 $j^{49} = \dots\dots\dots$

2.2 $j^{1012} = \dots\dots\dots$

3. จงหาค่าจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

3.1 $Z_1 = -5 - j2.6$

Re Z_1 , x คือ.....

Im Z_1 , y คือ.....

3.2 $Z_2 = \sqrt{2} - j\sqrt{2}$

Re Z_2 , x คือ.....

Im Z_2 , y คือ.....

3.3 จากค่าอิมพีแดนซ์ต่อไปนี้ จงหาค่าความต้านทาน(R) และอินดักทีฟรีแอกแตนซ์(X_L)

1) $Z = 20 + j60 \Omega$

R คือ..... Ω X_L คือ..... Ω

2) $Z = j44.5 + 30 \Omega$

R คือ..... Ω X_L คือ..... Ω

3) $Z = j22.6 \Omega$

R คือ..... Ω X_L คือ..... Ω

3.4 จากค่าอิมพีแดนซ์ต่อไปนี้ จงหาค่าความต้านทาน(R) และอินดักทีฟคาปาซิแตนซ์(X_C)

1) $Z = 45 - j80 \Omega$

R คือ..... Ω X_C คือ..... Ω

2) $Z = -j0.8 + 2.2 \Omega$

R คือ..... Ω X_C คือ..... Ω

3) $Z = -j8.7 \Omega$

R คือ..... Ω X_C คือ..... Ω

4. จงแสดงวิธีเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบ Polar form

4.1 $Z_1 = 10 - j10$

.....
.....
.....
.....
.....

4.2 $Z_2 = 2(2 + j)$

.....
.....
.....
.....
.....

4.3 $Z_3 = -j7$

.....
.....
.....
.....
.....

4.4 $Z_4 = -5 + j\sqrt{5}$

.....
.....
.....
.....
.....

5. จงแสดงวิธีเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนจากข้อ 4 ให้อยู่ในรูปแบบ Exponential form

6. จงแสดงวิธีเปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแบบ Rectangular form

6.1 $Z_1 = 3\angle 45^\circ$

.....
.....
.....
.....
.....

6.2 $Z_2 = 4\angle -100^\circ$

.....
.....
.....
.....
.....

6.3 $Z_3 = 10e^{j\frac{\pi}{6}}$

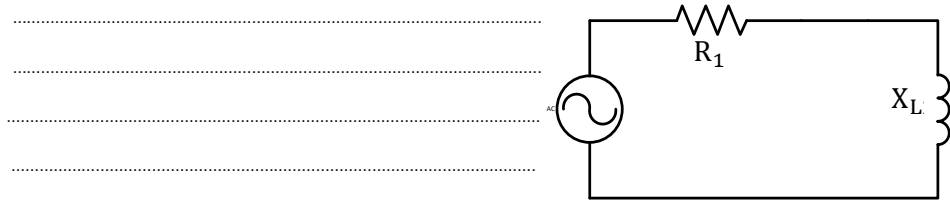
.....
.....
.....
.....
.....
.....

6.4 $Z_4 = 5e^{-j\frac{3\pi}{4}}$

.....
.....
.....
.....
.....
.....

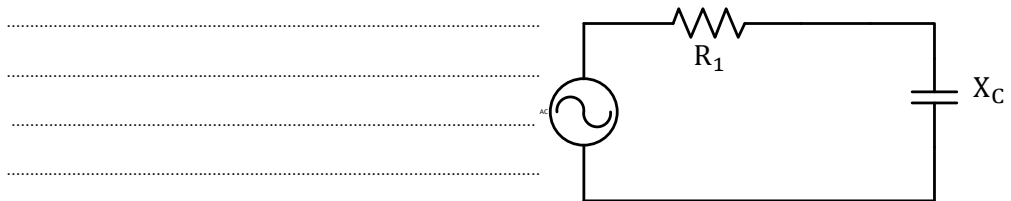
7. จากวงจรต่อไปนี้ จงหาค่าอิมพีแดนซ์รวม (Z) ในรูปแบบ Polar Form

7.1 จากรูปที่ 1.18 กำหนดให้ $R_1 = 3 \, \Omega$, $X_L = j19 \, \Omega$



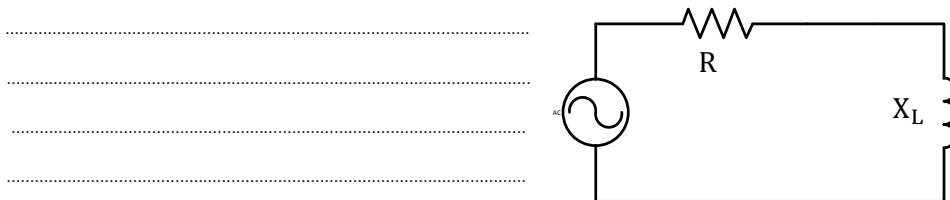
รูปที่ 1.18 วงจรอนุกรม RL

7.2 จากรูปที่ 1.19 กำหนดให้ $R_1 = 5 \, \Omega$, $X_C = -j8 \, \Omega$



รูปที่ 1.19 วงจรอนุกรม RLC

8. จากวงจรดังรูปที่ 1.20 ถ้าอิมพีแดนซ์รวม $Z = 20 \angle 22^\circ \, \Omega$ จงหาค่าของ R และ X_L



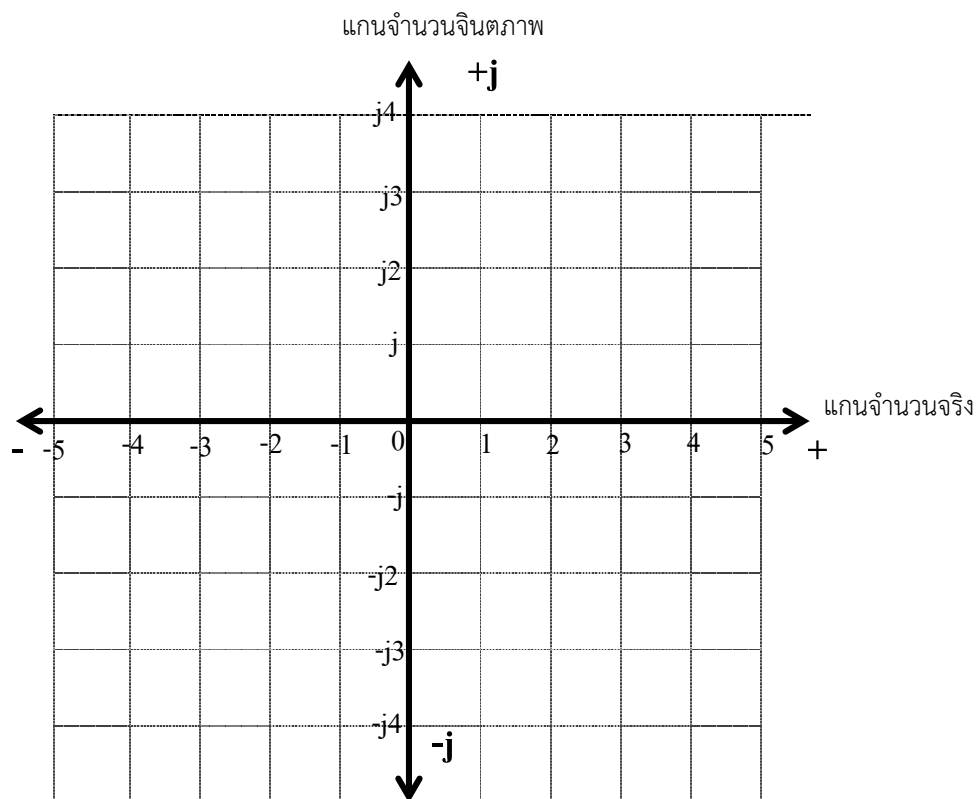
รูปที่ 1.20 วงจรอนุกรม RL

9. จงเปลี่ยนรูปแบบจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ โดยใช้เครื่องคำนวณ

ข้อ	Rectangular form	Polar form
1	$5 + j4$	
2		$5\angle 138^\circ$
3	$9 - j7$	
4		$10\angle -144^\circ$
5	$-6 + j6$	
6		$180\angle 0^\circ$
7	$0 - j90$	
8		$5\angle 45^\circ$
9	$8 - j8$	
10		$0.34\angle 80^\circ$

10. จงกำหนดจุดแทนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$$A = -4 + j \quad B = 2 - j4 \quad C = 5 + j3.5 \quad D = 0 - j1$$



รูปที่ 1.21 แกนพิกัดจำนวนเชิงซ้อนแบบฝึกหัดข้อ 9

แบบทดสอบหลังเรียน หน่วยที่ 1
เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน

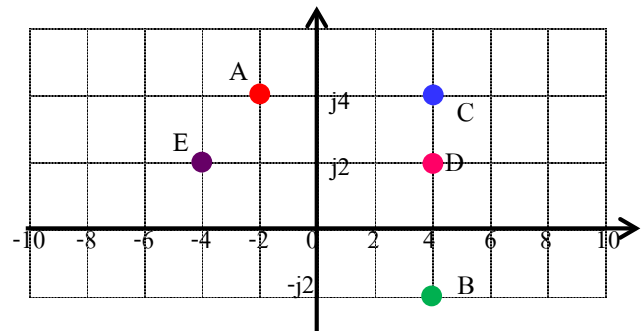
จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด

1. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ใช่ “ จำนวนจริง ”

- ก. $-\sqrt{5}$, 10^{-5} , $-\sqrt[4]{2}$
- ข. $\sqrt{-16}$, $2\sqrt{-2}$, $\frac{\sqrt{-1}}{2}$
- ค. $-2\frac{5}{7}$, 2^5 , 0.0001
- ง. $-\sqrt[3]{1}$, $-\pi^{-5}$, $-4\sqrt{2}$
- จ. $-e^2$, $(-\sqrt{2})^2$, $\sqrt{\pi}$

2. จากรูปตำแหน่งใด คือ $4 + j2$

- ก. ตำแหน่ง A
- ข. ตำแหน่ง B
- ค. ตำแหน่ง C
- ง. ตำแหน่ง D
- จ. ตำแหน่ง E



3. เมื่อ $A = 0.80(\cos 300^\circ + j\sin 300^\circ)$ ข้อใดถูกต้อง

- ก. $\text{Re}(A) = -0.4$, $\text{Im}(A) = -0.866$
- ข. $\text{Re}(A) = 0.4$, $\text{Im}(A) = -0.866$
- ค. $\text{Re}(A) = 0.4$, $\text{Im}(A) = 0.866$
- ง. $\text{Re}(A) = 0.4$, $\text{Im}(A) = -0.693$
- จ. $\text{Re}(A) = -0.4$, $\text{Im}(A) = -0.693$

4. ถ้า $Z_1 = -20 - j6$ ข้อใด คือ Polar form ของ Z_1

- ก. $20.88\angle -106.7^\circ$
- ข. $20.88\angle -163.3^\circ$
- ค. $20.88\angle -73.3^\circ$
- ง. $20.88\angle -16.7^\circ$
- จ. $20.88\angle -10.7^\circ$

5. ข้อใดต่อไปนี้มีค่าเท่ากับ $12\angle 240^\circ$

- ก. $6 - j10.4$
- ข. $-6 + j10.4$
- ค. $-6 - j10.4$
- ง. $240.3 + j2.86$
- จ. $240.3 - j87.14$

6. ถ้า $Z = R - jX$ จงหา $|Z|$ เมื่อ $R = 9$, $X = 10$

- ก. $8.86\angle -1.56^\circ$
- ข. $9.88\angle -1.56^\circ$
- ค. $10.88\angle -63.3^\circ$
- ง. $13.45\angle -42^\circ$
- จ. $13.45\angle -48^\circ$

7. ข้อใดถูกต้องที่สุด

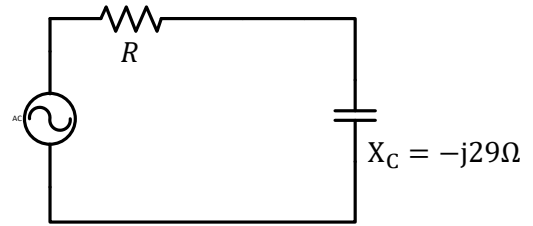
- ก. $10\angle 10^\circ = 10e^{j\frac{\pi}{18}}$
- ข. $35\angle 45^\circ = 35e^{j\frac{\pi}{10}}$
- ค. $40\angle 25^\circ = 400e^{j\frac{\pi}{8}}$
- ง. $96\angle 65^\circ = 96e^{j\frac{\pi}{3}}$
- จ. $110\angle 60^\circ = 110e^{j\frac{\pi}{30}}$

8. รูปแบบ Rectangular form ของ $8.5e^{-j2.59}$ คือข้อใด

- ก. $8.86 - j16.38$
- ข. $8.49 - j0.38$
- ค. $7.66 - j7.83$
- ง. $-7.96 - j8.38$
- จ. $-7.24 - j4.45$

9. วงจรดังรูป จงหาค่าความต้านทาน เมื่ออิมพีแดนซ์รวมของวงจร $Z = 56.94\angle -30.62^\circ \Omega$

- ก. $R = 49 \Omega$
- ข. $R = 45.3 \Omega$
- ค. $R = 39.4 \Omega$
- ง. $R = 38 \Omega$
- จ. $R = 29 \Omega$



10. จากวงจรดังรูป ถ้าอิมพีแดนซ์รวมของวงจร $Z = 90\angle\theta^\circ \Omega$ ความต้านทาน $R = 10 \Omega$ จงหาค่ามุม θ และรีแอคแตนซ์ X_L

- ก. $\theta = 83.62^\circ$, $X_L = 89.44 \Omega$
- ข. $\theta = 77.89^\circ$, $X_L = 99.54 \Omega$
- ค. $\theta = 73.26^\circ$, $X_L = 90.18 \Omega$
- ง. $\theta = 63.99^\circ$, $X_L = 79.45 \Omega$
- จ. $\theta = 59.43^\circ$, $X_L = 82.64 \Omega$

